Εισαγωγή στην Τοπολογία	10-3-20 5ο Μάθημα

Απόδειξη (Τελευταία πρόταση 4ου μαθήματος):

i) Αν $x_0 \in A^o$ τότε $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A$ και αφού $x_0 \in B_\rho(x_0, \varepsilon)$ προκύπτει ότι $x_0 \in A$.

ii) Αν $x \in A^o$, τότε $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq A$

$x \in B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq \underbrace{\bigcup}_{\text{ένωση}} \{V \mid V\text{:ανοιχτό} \wedge V \subseteq A\}$

Άρα $A^o \subseteq \bigcup \{V \mid V\text{:ανοιχτό} \wedge V \subseteq A\}$

Αντίστροφα, αν $x \in \bigcup \{V \mid V\text{:ανοιχτό} \wedge V \subseteq A\}$ τότε υπάρχει V: ανοιχτό με $V \subseteq A$ ώστε $x \in V$. Αφού V: ανοιχτό $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V \ (\subseteq A)$. Άρα $x \in A^o$.

Έτσι δείξαμε ότι η $\bigcup \{V \mid V\text{:ανοιχτό} \wedge V \subseteq A\} \subseteq A^o$

επομένως $A^o = \bigcup \{V \mid V\text{: ανοιχτό} \wedge V \subseteq A\}$

Απο εδώ προκύπτει ότι το A^o είναι ανοιχτό (ως ένωση ανοιχτών συνόλων).

iii) Αν $A \subseteq B$ τότε (αφού $A^o \subseteq A$) θα έχουμε $A^o \subseteq B$. Σύμφωνα με το (ii) $\Rightarrow A^o \subseteq B^o$.

iv) "$\Longrightarrow$" Αν $A = A^{o}$, εφόσον το A^{o} είναι ανοιχτό προκύπτει ότι A ανοιχτό.

"$\Longleftarrow$" Αν A ανοιχτό τότε σύμφωνα με το (ii) προκύπτει ότι $A^{o} = A$

v) $\left.\begin{array}{l} A\cap B \subseteq A \\ A\cap B \subseteq B \end{array}\right\} \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} (A\cap B)^{o} \subseteq A^{o} \\ (A\cap B)^{o} \subseteq B^{o} \end{array}\right\} \Longrightarrow (A\cap B)^{o} \subseteq A^{o}\cap B^{o}$. (1)

<u>Αντίστροφα</u>: Από την (i) $\left.\begin{array}{l} A^{o}\subseteq A \\ B^{o}\subseteq B \end{array}\right\} \Longrightarrow A^{o}\cap B^{o} \subseteq A\cap B$

Το σύνολο $A^{o}\cap B^{o}$ είναι ανοιχτό ως τομή δύο ανοιχτών συνόλων. Άρα $A^{o}\cap B^{o} \subseteq (A\cap B)^{o}$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι $(A\cap B)^{o} = A^{o}\cap B^{o}$.

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Αντίστροφη ιδιότητα της (v) που αποδείξαμε για την τομή <u>δεν</u> ισχύει για την ένωση.

Δηλαδή δεν ισχύει πάντα ότι $(A\cap B)^{o} = A^{o}\cap B^{o}$

<u>π.χ.</u>: Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, για $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Τότε $A^{o} = \emptyset$, $B^{o} = \emptyset$ άρα $A^{o}\cap B^{o} = \emptyset$ ενώ $A\cup B = \mathbb{R}$ και άρα $(A\cup B)^{o} = \mathbb{R}$.

ii) Η ιδιότητα (v) επεκτείνεται (χρησιμοποιώντας επαγωγή) σε πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \subseteq X$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^o = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^o .$$

<u>Δεν</u> ισχύει όμως για άπειρες τομές.

<u>π.χ.</u>: Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^o = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}$$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^o = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n)\right)^o = (\{0\})^o = \emptyset .$$

<u>Υπενθύμιση</u>: Αν (X, ρ) μ.χ. $A \subseteq X$, η $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$, με $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$ $\forall x, y \in A$.

(ΑΡΑ) Η ρ_A λέγεται σχετική μετρική στο A που προέρχεται από την ρ.

<u>Πρόταση</u>: Έστω (X, ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$ τότε:

i) Αν $G \subseteq A$ το G είναι ανοιχτό στον (A, ρ_A) αν-ν υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του X ώστε $G = A \cap V$.

ii) Αν $B \subseteq X$ τότε $A \cap int_A(B) \subseteq int_A(A \cap B)$

[όπου $int_X(B)$ είναι το εσωτερικό του B στο μ.χ. (X, ρ) και το $int_X(A \cap B)$ το εσωτ. του $A \cap B$ στο μ.χ. (A, ρ_A).]

Απόδειξη: i) "$\Longleftarrow$" Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο V του μ.χ. (A, ρ) ώστε $G = A \cap V$. Θ.δ.ο. το G είναι ανοιχτό στο (A, ρ_A). Έστω $x \in G$. Τότε $x \in A$ και $x \in V$, εφόσον το V είναι ανοιχτό στο μ.χ. (X, ρ) υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$. Άρα $\underbrace{A \cap B_\rho(x, \varepsilon)}_{= B_{\rho_A}(x, \varepsilon)} \subseteq A \cap V = G$

Επομένως $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) \subseteq G$ έτσι G ανοιχτό σύνολο.

"$\Longrightarrow$" Υποθέτουμε ότι το G είναι ανοιχτό στον (A, ρ_A). $(\forall x \in X)\ (\exists \varepsilon_a > 0)$ ώστε $B_{\rho_A}(x, \varepsilon_a) \subseteq G$. Ορίζουμε $V = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_a)$.

Τότε το V είναι ανοιχτό υποσύνολο του X (ως ένωση ανοιχτών) και $A \cap V = G$

$$\left[A \cap V = A \cap \left(\bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_a) \right) = \bigcup_{x \in G} \left(A \cap B_\rho(x, \varepsilon_a) \right) = \right.$$

$$\left. = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_a) = G \right]$$

ii) Το σύνολο $A \cap int_X(B)$ είναι η τομή του A με κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του X, άρα είναι ανοιχτό στο μ.χ. (A, ρ_A) και περιέχεται στο $A \cap B$ (διότι $int_X(B) \subseteq B$) επομένως $A \cap int_X(B) \subseteq$
$\subseteq int_A(A \cap B)$.

Παραδείγματα: 1) Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, έστω $A=[0,1]$

Το σύνολο $G=[0,1/2)$ είναι ανοιχτό στον A

διότι $G = A \cap \underbrace{(-\infty, 1/2)}_{\text{ανοιχτό στο } \mathbb{R}}$

Ομοίως το $G_2=(1/3,1]$ είναι ανοιχτό στο

$A=[0,1]$ διότι $G_2=[0,1]\cap \underbrace{(1/3,2)}_{\text{ανοιχτό στο } \mathbb{R}}$

2) $A=[0,1]$, $B=[0,1/2)$

$int_A(B)=[0,1/2)$, διότι το B είναι ανοιχτό στο $[0,1]$.

ενώ $int_{\mathbb{R}}([0,1/2))=(0,1/2)$

3) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

$int_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N})=\mathbb{N}$ ενώ $int_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})=\emptyset$

[Το $\mathbb{N}$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{Z}$, διότι

$\mathbb{N}=\mathbb{Z}\cap\left(\bigcup_{\mathbb{N}}(n-1/2,n+1/2)\right)$]

Ορισμός (κλειστά σύνολα): Έστω (X,ρ) μ.χ. και $F\subseteq X$. Το F λέγεται κλειστό (ως προς ρ) αν το $X\setminus F$ είναι ανοιχτό $(=F^c)$.

<u>Παραδείγματα:</u> i) Σε κάθε μ.χ. (X,ρ) τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.

Έστω $F=\{x\}$

Για να δ.ο. το $F=\{x\}$ είναι κλειστό θ.δ.ο. το $G=X\setminus\{x\}$ είναι ανοιχτό. Έστω $y\in G$.

Τότε $y\neq x$ άρα $\rho(x,y)>0$. Άρα για $\varepsilon=\rho(x,y)>0$ έχουμε ότι $x\notin B_\rho(y,\varepsilon)$

άρα $B_\rho(y,\varepsilon)\subseteq X\setminus\{x\}=G$

Δηλαδή G ανοιχτό συνεπώς F: κλειστό.

ii) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

α) $(-\infty,a]$ είναι κλειστό (διότι το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό)

β) Αν $a<b$ το $[a,b]$ είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμά του $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ είναι ανοιχτό.

iii) Στον διακριτό μετρικό χώρο (X,ρ) κάθε υποσύνολο είναι κλειστό διότι κάθε υποσύνολο είναι ανοιχτό.

iv) Έστω (X,ρ) τυχαίος μ.χ. κάθε κλειστή μπάλα στο X είναι κλειστό σύνολο.